数理解析研究所講究録
第804巻 1992年 107-120

ホロサイクルの剛性の幾何学的取り扱いについて

慶応大 理工　阿部 隆次 (Ryuji Abe)

1 序

負曲率の Riemann 空間の測地流は古典的に有名な力学系であって、エルゴード理論の立場からその性質がいろいろと調べられてきた。測地線に付随する横断的なホロサイクルに沿う流れの性質を調べるという問題は測地流の場合とは異なる観点から研究されている。M.Ratner は [R1] において、定負曲率曲面におけるホロサイクルに沿う流れに関する剛性を証明した。それは、ホロサイクルに沿う流れの間の測度論的な同型が幾何構造を反映しているという意味で、ホロサイクルに沿う流れに関する一連の結果のなかで最も顕著なものである。ここでは最近得られた Otal の定理を利用し幾何学的手法により Ratner の結果に対する別証明のアイデアを与え、可変負曲率曲面上のホロサイクルに対する類似の結果を述べる。証明の細部は [A2] を参照していただきたい。

2 Ratner の剛性定理

この節では Ratner の剛性定理を紹介する。最初に定負曲率曲面上の測地流とホロサイクルに沿う流れは代数的に表すことができることを簡単に復習しておく。詳しい議論は [AGH] [GF] を参照されたい。

$\mathbf{H}$ を上半平面 $\{z = x + iy : y > 0\}$ とし、その上に Riemann 計量 $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ を考えておく。このとき $\mathbf{H}$ は 2 次元の Riemann 多様体で断面曲率が -1 となる。さらに、

$T_1\mathbf{H}$ によって $\mathbf{H}$ の単位接バンドルを表すことにする。

$\mathbf{H}$ 内の測地線は実軸と垂直に交わる直線か半円であることが知られている。$\mathbf{H}$ 内の点 z において単位ベクトル v を考えると、v を接ベクトルとする測地線が唯一定まる。そのとき、ベクトル v の向きをそのまま測地線の向きと考える。その測地線に沿って速さ 1 で接ベクトル v を動かすことによって得られる流れが $T_1\mathbf{H}$ における測地流である。

また、$\mathbf{H}$ 内のホロサイクルは実軸に接する円か実軸と平行な直線であることが知られている。$\mathbf{H}$ 内の点 z における単位ベクトル v に対し、v を内側の法線ベクトルとして持ち、上で定めた測地線の正方向での実軸との交点で接する円と、v を外側の法線ベクトルとして持ち、測地線の負方向での実軸との交点で接する円の 2 つが得られる。前者を縮小的ホロサイクル、後者を伸長的ホロサイクルと呼ぶ。測地線が実軸に直交する直線である場合は、実軸と平行な直線を半径無限大の円と考えることにより、同様にして 1 組のホロサイクルを得る。ベクトル v の向きを虚軸の正方向に対応させたとき、実軸の正方向に相当する方向を縮小的ホロサイクルおよび伸長的ホロサイクルの正方向とする。伸長的ホロサイクルに沿って速さ 1 で接ベクトル v を動かすことによって $T_1\mathbf{H}$ における伸長的ホロサイクルに沿った流れを定義する。同様にして、縮小的ホロサイクルに沿った流れも定義される。

$\mathbf{H}$ を $\mathbf{H}$ 自身に移す 1 次分数変換からなる集合を Σ によって表す。Σ は $T_1\mathbf{H}$ 上推移的に作用していることは容易に確かめられる。Σ の元 σ は a, b, c, d を実数として、$\sigma(z) = (az+b)/(cz+d), ad-bc=1$ と表すことができる。この対応により特殊線形群 $SL(2,\mathbf{R})$ から Σ への写像を考えると、その核は $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$ となる。従って、$SL(2,\mathbf{R})$ をこの核で割ることによって得られる射影特殊線形群 $PSL(2,\mathbf{R})$ と $T_1\mathbf{H}$ を同一視することができる。以下、$PSL(2,\mathbf{R})$ を G と表すことにする。

$\mathbf{H}$ 内の点 i において、虚軸と同じ方向を持つ単位ベクトル v_0 を考える。そのとき上で述べた方法により、測地流および伸長的ホロサイクルに沿った流れと縮小的ホロサイクルに沿った流れを得る。Σ は $T_1\mathbf{H}$ 上推移的に作用していたことにより、$\mathbf{H}$ 内の任意の点 z における単位ベクトル v はある Σ の元 σ による $i \mapsto \sigma(i)$ なる写像により v_0 を移したものと考えることができるので、$T_1\mathbf{H}$ 上の測地流は G 上 1 パラメーター部分群 $\begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix}, r \in \mathbf{R}$ によって導かれる流れと同一視できる。同様の理由により、$T_1\mathbf{H}$ 上伸長的ホロサイクルに沿った流れは G 上 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbf{R}$ によって導かれる流れと、縮小的ホロサイクルに沿った流れは $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ によって導かれる流れと同一視できる。

以上により上半平面における 3 つの流れの代数的な表現が得られたが、流れのエルゴード論的な性質を調べるために $M = \Gamma\backslash G$ がコンパクトになる様な離散群 Γ による商空間を目的の空間とする。すなわち、M は断面曲率が -1 の 2 次元コンパクトな Riemann 多様体である。M.Ratner による結果は M が有限体積になる場合について与えられているが、可変曲率への拡張を考える都合上ここではコンパクトな場合を扱うことにする。上半平面における 3 つの流れに対応して、M 上以下の流れを得る。

1. 測地流 g

$$g_r(\Gamma g) = \Gamma g \begin{pmatrix} e^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{r}{2}} \end{pmatrix}, \ \Gamma g \in M, \ r \in \mathbf{R},$$

2. 伸長的ホロサイクルに沿う流れ h

$$h_s(\Gamma g) = \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, \ \Gamma g \in M, \ s \in \mathbf{R},$$

3. 縮小的ホロサイクルに沿う流れ k

$$k_t(\Gamma g) = \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \Gamma g \in M, \ t \in \mathbf{R}.$$

G は Haar 測度を持つので、それから導かれた体積要素 v を考えることができる。そのとき v と M 上の Borel 集合体を完備化および正規化した測度空間 $(M, \mathbf{B}, \mu), \mu(M) = 1$ を得る。伸長的ホロサイクルに沿う流れ h は $(M, \mathbf{B}, \mu)$ 上一意的にエルゴード的であることや、混合的であることが知られている。([CFS] [F] 参照。)

以上の状況で Ratner の剛性定理は次のように述べることができる。

定理

$M = \Gamma\backslash G, M' = \Gamma'\backslash G$ を定負曲率を持つ 2 つの 2 次元コンパクト Riemann 曲面とする。$(M, \mu), (M', \mu')$ 上の伸長的ホロサイクルに沿う流れ h, h' の間に測度論的同型を与える写像 φ が存在すると仮定する。すなわち、$\varphi : \Gamma\backslash G \to \Gamma'\backslash G$ は $\varphi(h_t(\Gamma g)) = h'_t\varphi(\Gamma g)$ a.e. $\Gamma g \in \Gamma\backslash G$ をみたす。そのとき、G 内の元 C とある定数 σ が存在し、$\varphi = h'_\sigma \phi_C$ a.e. と表すことができる。ただし、ここで C は $\Gamma' = C\Gamma C^{-1}$ をみたし、ϕ_C は $\phi_C(\Gamma g) = \Gamma' C g, \Gamma g \in \Gamma\backslash G$ によって定義される写像である。

ここで、いくつかの注意を与えておく。上の定理において、φ は 1 対 1 の可測関数として考えられているが、φ が多対 1 を許す可測関数すなわち商変換である場合についても類似の結果が得られている。詳しくは、[A1] [R2] を参照されたい。また、Ratner の議論においては φ の可測性を Lusin の定理と伸長的ホロサイクルに沿う流れのエルゴード性により連続性に置き換えることによって証明が進められている。上の結果において $\Gamma' = C\Gamma C^{-1}$ なる関係は $\mathbf{H}$ 上の等長変換、ϕ_C はその等長変換の $T_1\mathbf{H}$ 上へのリフトを M に制限したものと解釈することができる。従って、可変負曲率の場合では伸長的ホロサイクルの間に成立する “ある種” の同型が曲面上の等長変換の単位接バンドルへのリフトを反映するかという

ことが問題となる。

3 可変負曲率曲面における測地流と Otal の定理

この節では可変負曲率の場合の測地流とホロサイクルを導入し、その測地流をパラメーターを保って移す連続写像は曲面上の等長変換のリフトであるという Otal の定理を紹介する。

N を可変負曲率を持つコンパクトな Riemann 曲面とし、N の単位接バンドル T_1N を M によって表すことにする。(以下、混乱する恐れはないと思われるので、簡単のため、対応する空間および流れは定負曲率の場合と同じ記号を用いて表す。) N の点 x における単位ベクトル v は x において v に接する N の測地線を定義する。その測地線に沿って x から v 方向に速さ 1 で接ベクトルを動かすことによって得られる、長さをパラメーターとする流れを M における測地流といい、g によって表す。N は負曲率であったので、g は Anosov 型の流れでもある。すなわち、M の接バンドル TM は $TM = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$ と一意に分解され、部分バンドルは以下の条件をみたす。

(A) E^0 は測地流 g を生成するベクトル場 G によってはられ、$E^0, E^\pm$ はそれぞれ g 不変である。

(B) $v^\pm \in E^\pm$ に対して $dg_r v^\pm$ は $r \to \pm\infty$ のとき指数的に 0 に収束する。

ここで、ベクトル場 E^- を積分することによって得られる曲線が伸長的ホロサイクルとなる。同様に、ベクトル場 E^+ を積分することによって縮小的ホロサイクルを得る。可変負曲率の場合にはホロサイクルに沿った流れは局所的に構成されるのであるが、詳しい議論は §5 で行なうことにする。

上で得た測地流 g に対して J.P.Otal によって示された良い結果がある。証明など詳しいことは [O] 参照。

定理

N, N' を可変負曲率を持つコンパクトな Riemann 曲面、M, M' をそれぞれ N, N' の単位接バンドルとする。$\psi : M \to M'$ が連続写像で、ある数 $c \in \mathbf{R}$ に対して $\psi \circ g_r = g'_{cr} \circ \psi$ をみたすとき、N と N' は相似である。すなわち、N と N' の Riemann 計量の違いは定数倍でしかない。特に $c = 1$ であるときには N と N' は等長である。

この結果により、曲面 N, N' が等長あるいは相似であることを主張するためには、ある連続写像によって測地線がパラメーターを保って移されるか、あるいはパラメーターが定数倍だけ変化して移されるかを示せばよいことになる。

4 Ratner の剛性定理の証明

この節では Ratner の剛性定理の別証明のアイデアを述べる。記号は §2 で用いたものと同じものを用いる。また、簡単のためにすべての流れおよび伸長的ホロサイクルに沿う流れの間に同型を与える写像は十分な微分可能性を持つものとし、流れの代わりに流れを生成するベクトル場を扱う。このように仮定し議論を行なうために測度を用いて表されていた流れの性質を位相的な性質としてとらえなおす必要がある。ここの証明では伸長的ホロサイクルに沿う流れの極小性、すなわち、任意の $x \in M$ に対して h による x の軌道が M で稠密であること、が重要な役割をはたす。

測地流 g を生成するベクトル場を G、伸長的ホロサイクルに沿う流れ h を生成するベクトル場を H、縮小的ホロサイクルに沿う流れ k を生成するベクトル場を K によって表

す。ベクトル場 G, H, K は以下の関係をみたす。

$$[H, G] = H, \quad [K, G] = -K \quad \text{および} \quad [H, K] = -2G.$$

これらは流れの間の交換関係

$$g_r h_s = h_{se^r} g_r, \quad g_r k_t = k_{te^{-r}} g_r, \quad h_s k_t = k_{\frac{t}{(1+st)}} g_{2log(1+st)} h_{\frac{s}{(1+st)}}$$

をベクトル場によって表したものに他ならない。M' の上にもベクトル場 G', H', K' が存在し、同様の関係をみたしている。このとき示すべきことは次のように表される。

1対1かつ微分可能な写像 $\varphi : M \to M'$ が $d\varphi(H) = H'$ をみたすならば、δ を定数 ψ を等長変換の M へのリフトとして $\varphi = h'_\delta \psi$ と表すことができる。

以下、この主張を証明する。前節の Otal の結果を用いることにより ψ が測地流をパラメーターを保って移すものとしてとれることがいえればよい。$d\varphi$ によるベクトル場 G の移され方を見るために a, b, c を M 上で定義された微分可能な関数として $d\varphi(G) = aG' + bH' + cK'$ とおく。ここで、ベクトル場の関係 $[H, G] = H$ を $d\varphi$ によって写像することを考える。すなわち、$[d\varphi(H), d\varphi(G)] = d\varphi(H)$ 。仮定により直ちに $[H', aG' + bH' + cK'] = H'$ 。左辺を展開し、M' におけるベクトル場 G', H', K' の関係を用いて 整理すると次のようになる。

$$(H'a - 2c)G' + (a + H'b)H' + (H'c)K' = H'.$$

ベクトル場 G', H', K' の係数をそれぞれ比較することによって以下の偏微分方程式を得る。

$$H'a = 2c, \tag{4.1}$$

$$H'b = 1 - a, \tag{4.2}$$

$$H'c = 0. \tag{4.3}$$

(4.3) と (4.1) より直ちに $(H')^2a=0$ を得る。すなわち、a は H' 方向 1 次式によって表される。ところが H' によって生成される伸長的ホロサイクルに沿った流れ h' の極小性により h'−軌道は再帰的であるので、1 次式の単調性は a が M 上の点に関して連続であることに反する。従って a は定数でなければならない。そのとき、(4.2) により $(H')^2b=0$ を得る。全く同様な議論により b も定数でなければならない。直ちに (4.2) より $a=1$、(4.1) より $c=0$ が結論される。以上をまとめて $d\varphi(G)=G'+bH'$ 但し、b は定数 を得る。

次に $d\psi(G)=G'$ をみたす ψ を用いて $\varphi=h'_\delta\psi$ と表せることを示す。δ を M 上の微分可能な関数として $x\in M$ に対して $\psi(x)=h'_{-\delta(x)}\varphi(x)$ とおく。ここで $d\psi$ によるベクトル場 G の移され方を調べる。

$$
\begin{aligned}
d\psi(G) &= (G(-\delta))H'+dh'_{-\delta}d\varphi(G)\\
&= (-G\delta)H'+dh'_{-\delta}(G'+bH')\\
&= (-G\delta)H'+dh'_{-\delta}G'+dh'_{-\delta}(bH')\\
&= (-G\delta)H'+(\delta H'+G')+bH'\\
&= (\delta+b-G\delta)H'+G'
\end{aligned}
$$

(ここで、$dh'_s(G')=-sH'+G'$ なる式の変形を用いた。これは $[H',G']=H'$ の幾何学的な意味から得られる。) 従って、δ が $G\delta=\delta+b$ をみたすようにとればよい。b は定数であったので $\delta=-b$ が解となる。

5 剛性定理の可変負曲率曲面への拡張

前節の定負曲率曲面における剛性定理の証明において重要な役割を果たしていたのは、流れの間に成立している交換関係と伸長的ホロサイクルに沿う流れの極小性であった。後

者は Anosov 型の流れに付随する葉層構造の性質により可変負曲率の場合にも成立する。すなわち、周期的でない伸長的ホロサイクルは M 内稠密である。よって、可変負曲率の場合にも前者と同様の流れの交換関係を導くことが目標となる。そのために M 上にアフィン接続を導入する。以下、この節では §3 で考えた空間を扱い、記号も §3 と同じものを用いる。

2 次元 Riemann 多様体 N の単位接バンドル M は接触多様体の典型的な例であって、自然な接触形式 θ を持つ。θ は M 上の 1 次形式である。このとき、θ と M 上の測地流 g との間には次の関係が成立する。

(1) θ とその外微分 $d\theta$ は g 不変である。

(2) 測地流 g を生成するベクトル場 G に対して $\theta(G)=1, d\theta(G,\cdot)=0$ が成立する。

(3) 2 次形式 $d\theta$ は部分バンドル $E=\{X\in TM:\theta(X)=0\}$ 上非退化である。

これらは全くの一般論から得られるものであって、N が負曲率であることは必要ない。§3 で述べたように N の負曲率性は g が Anosov 型の流れであることを導く。その性質を用い接触形式 θ がさらに次のような性質を持つことが証明できる。

(4) 全ての $X\in E^-\oplus E^+$ に対して、$\theta(X)=0$ である。

(5) 任意の $X^\pm, Y^\pm \in E^\pm$ に対して $d\theta(X^-,Y^-)=d\theta(X^+,Y^+)=0$ が成立する。

ここで得られた (1) から (5) までの性質により M 上の Riemann 擬計量 g を定義することができる。(3) と (4) から $E=E^-\oplus E^+$ が結論されるので、$I|E^\pm=\pm id$ なる関数を用いて $X,Y\in E$ に対して $\mathrm{g}_0(X,Y)=d\theta(X,IY)$ とおくと、g_0 は E 上の Riemann 擬計量となる。さらに $\mathrm{g}=\mathrm{g}_0+\theta\otimes\theta$ と定義することにより M 上の Riemann 擬計量を得る。また、N が 2 次元であることより M の接バンドルの分解 $TM=E^-\oplus E^0\oplus E^+$ は C^1級微分可

能であることが知られている。従って、Riemann 擬計量 $\mathbf{g}$ は M 上 C^1級微分可能である。このRiemann 擬計量 $\mathbf{g}$ に対し M 上のアフィン接続で次の条件をみたすものが一意的に存在する。

(i) $\nabla \mathbf{g} = 0$ である。

(ii) $X, Y \in TM$ に対して $T(X,Y) = d\theta(X,Y)$ が成立する。但し、ここで T はねじれ率テンソルである。

その存在と一意性は Riemann 計量に対する Riemann 接続の存在と一意性の証明と全く同様にしてなされる。このようにして得られたアフィン接続 ∇ は以下のような性質を持つ。

(6) ∇ は測地流 g の下で不変である。すなわち、M 上の任意のベクトル場 X, Y に対して $dg_\tau(\nabla_X Y) = \nabla_{dg_\tau X}(dg_\tau Y)$ をみたす。

(7) M 上任意のベクトル場 X に対して $\nabla_X G = 0, \nabla_X Y^\pm \in E^\pm$ が成り立つ。

(8) M 上任意のベクトル場 X に対して $\nabla_G X = [G, X]$ である。

ここで導入されたアフィン接続 ∇ に関するより詳しい議論は [K1] [K2] を参照されたい。

次に、今得られたアフィン接続 ∇ を用いて伸長的ホロサイクルに沿うベクトル場 H と縮小的ホロサイクルに沿うベクトル場 K を定める。H と K の方向は既に部分バンドル E^- と E^+ によって限定されているので、次の2つの仮定を採用しそれらの長さを決定する。

(a) $\nabla_H H \equiv 0,$

(b) $d\theta(H, K) \equiv 1.$

すなわち、(a) によってベクトル場 H が伸長的ホロサイクルに平行になるようにベクトルの大きさを限定し、$d\theta$ が E 上シンプレクティックであることを利用して (b) によってベク

トル場 K の大きさを定める。ここで、アフィン接続 ∇ はベクトル場の局所的な性質を与えるにすぎないので、ベクトル場 H, K は局所的に定義されるものである。測地流 g を生成するベクトル場 G と上で定めたベクトル場 H, K の間には局所的に次の関係が成り立つ。

$$[H, G] = \alpha H, \quad [K, G] = -\alpha K \quad \text{および} \quad [H, K] = -G + \beta H.$$

但し、ここで α, β は局所的に定まる連続関数で、α は $H\alpha = 0$ をみたす。これらの関係を導く詳しい計算は [A2] §3 を参照していただきたい。

以上により剛性定理を可変負曲率曲面に拡張するための準備が完了した。このとき、§4 と同様な計算によって次のことが結論される。

1 対 1 かつ微分可能な写像 $\varphi : M \to M'$ が $d\varphi(H) = fH'$ をみたすとする。但し、f は $Hf = 0$ なる M 上の微分可能な関数である。そのとき、δ を定数 ψ を N 上の等長変換の M へのリフトとして $\varphi = \hat{h}'_\delta \psi$ と表すことができる。ここで $\hat{h}'$ は M' 上大域的に定義される伸長的ホロサイクルに沿う流れである。

この可変負曲率曲面の場合の計算ではベクトル場の間に成立する関係は局所的な性質であるため、伸長的ホロサイクルの極小性と結びつけるために貼り合わせの議論を必要とする。また、$Hf = 0$ なる仮定は写像 φ がアフィン接続を保つという仮定に相当し、M' 上大域的に定義される伸長的ホロサイクルに沿う流れ $\hat{h}'$ を構成するために必要となる。この様に Ratner の剛性定理に対する別証明のアイデアは可変負曲率の場合にも有効であり、より弱い条件の下での次の定理の証明の基礎となる。

定理

1 対 1 の連続写像 $\varphi : M \to M'$ がアフィン接続を保ち M 上の伸長的ホロサイクルを M' 上の伸長的ホロサイクルに移すならば、N と N' は相似である。

この定理の証明は [A2] §5 を参照していただきたい。

最後にこれまで述べてきたホロサイクルの剛性に対する幾何学的な取り扱いの利点をあげる。第一は、接触構造からアフィン接続を導き、Anosov 型の流れに付随する葉層構造の交換関係を調べるというように、古典力学と微分幾何および力学系との関連のなかにホロサイクルの剛性を位置づけることができる点である。また、§4 で示したように定負曲率の場合のホロサイクルに沿う流れの剛性の別証明を含んでいる。最も重要であるのは次に示す第三点めである。ここで導入したアフィン接続は曲率を制限することによって高次元の場合でも全く同様に導くことができる。Anosov 型の流れに付随する葉層構造の性質も高次元である場合に何らかわることはないので、可変負曲率かつ高次元 Riemann 多様体に剛性定理を拡張するための微分可能性を仮定した §4 と同様な計算は実行できる。この場合は §3 で示した Otal の定理に相当するものがないために多様体どうしが等長または相似であるといった強い主張はできないが、次のような予想をたてることができる。

> N, N' を 3 次元以上の可変負曲率 Riemann 多様体、M, M' をそれらの単位接バンドルとする。そのとき、1 対 1 の連続写像 $\varphi : M \to M'$ がアフィン接続を保ち M 上の伸長的ホロ球を M' 上の伸長的ホロ球に移すならば、次をみたす ψ と $\hat{h}$ が存在して $\varphi = \hat{h}\psi$ と表すことができる。$\psi : M \to M'$ はある $c \in \mathbf{R}$ に対して $\psi \circ g_r = g'_{cr} \circ \psi$ をみたす連続写像、$\hat{h}$ は M' 上大域的に定義される平行移動である。

これはホロ球の間の対応関係が測地流の間の対応関係を反映しているという横断的な構造の復元性を意味していると考えることができる。

参考文献

[A1] R.Abe, *Rigidity and factors of horocycle flows on surfaces of negative curvature,* Keio Sci. Tech. Rep. **44** (1991), 7-35.

[A2] R.Abe, *Geometric approach to rigidity of horocycles,* Preprint, 1991.

[AGH] L.Auslander, L.Green and F.Hahn, *Flows on homogeneous spaces,* Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press (1963), **no.53.**

[CFS] I.P.Cornfeld, S.V.Formin and Ya.G.Sinai, *Ergodic Theory,* Springer-Verlag, 1982.

[F] H.Furstenberg, *The unique ergodicity of the horocycle flow,* Recent Advances in Topological Dynamics, Springer-Verlag Lecture notes **no.318,** 95-114.

[GF] I.M.Gelfand and S.V.Formin, *Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature,* Amer. Math. Soc. Translation Series 2, **1** (1955), 49-66.

[K1] M.Kanai, *Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations,* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8** (1988), 215-239.

[K2] M.Kanai, *Tensorial ergodicity of geodesic flows,* Springer Lecture Notes in Math. **no.1339** (1988), 142-157.

[O] J.P.Otal, *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative,* Ann. Math. **131** (1990), 151-162.

[R1] M.Ratner, *Rigidity of horocycle flows,* Ann. Math. **115** (1982), 597-614.

[R2] M.Ratner, *Factors of horocycle flows,* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2** (1982), 465-489.